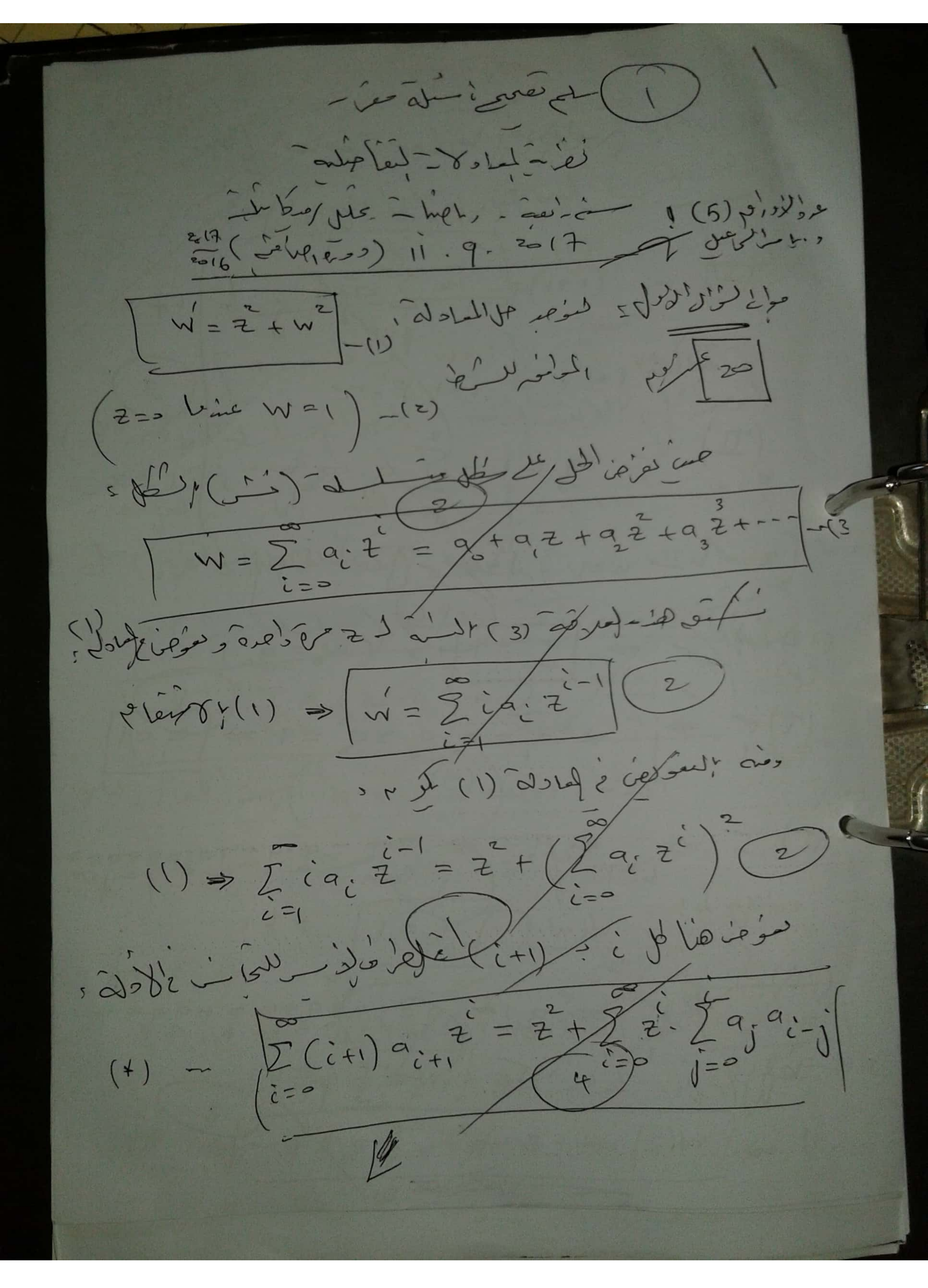


(1)

سلم تصحيح أسئلة [illegible]

نظرية المعادلات التفاضلية

عدد الأوراق (5) ! — سنة ثالثة - رياضيات - [illegible]

[illegible] 2017 . 9 . 11 (دورة إضافية) 2016/2017

جواب السؤال الأول: للتوصل إلى حل المعادلة:

$$w' = z^2 + w^2 \quad —(1)$$

الموافق للشرط: (20 علامة)

$$\left(z=0 \text{ عندما } w=1 \right) \quad —(2)$$

حيث نفرض الحل على شكل متسلسلة (سلسلة) الشكل:

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad —(3)$$

(2)

نشتق هذه المعادلة (3) بالنسبة لـ z مرة واحدة ونعوض في المعادلة (1):

$$(1) \Rightarrow \quad w' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$$

(2)

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد:

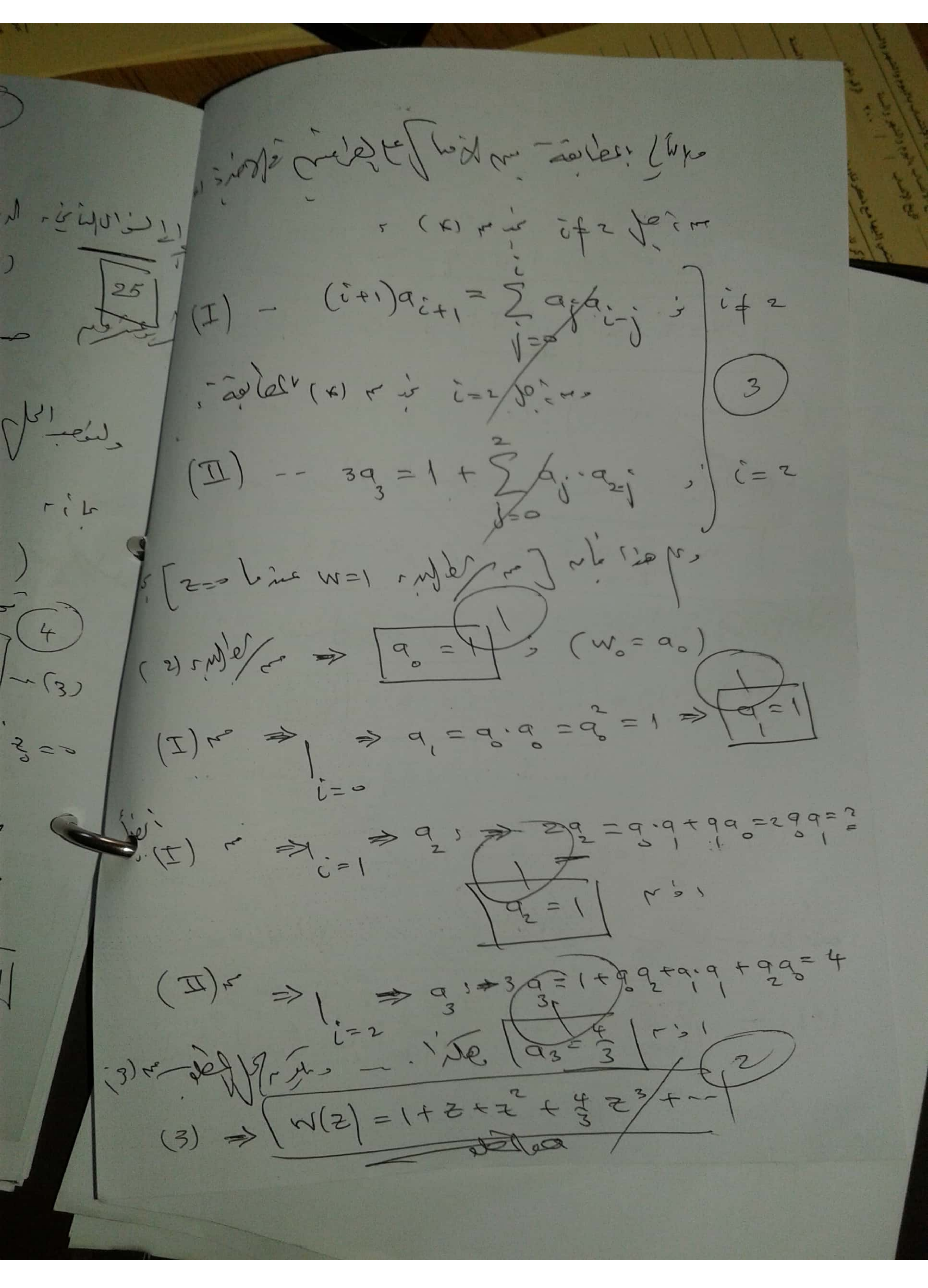
$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right)^2$$

(2)

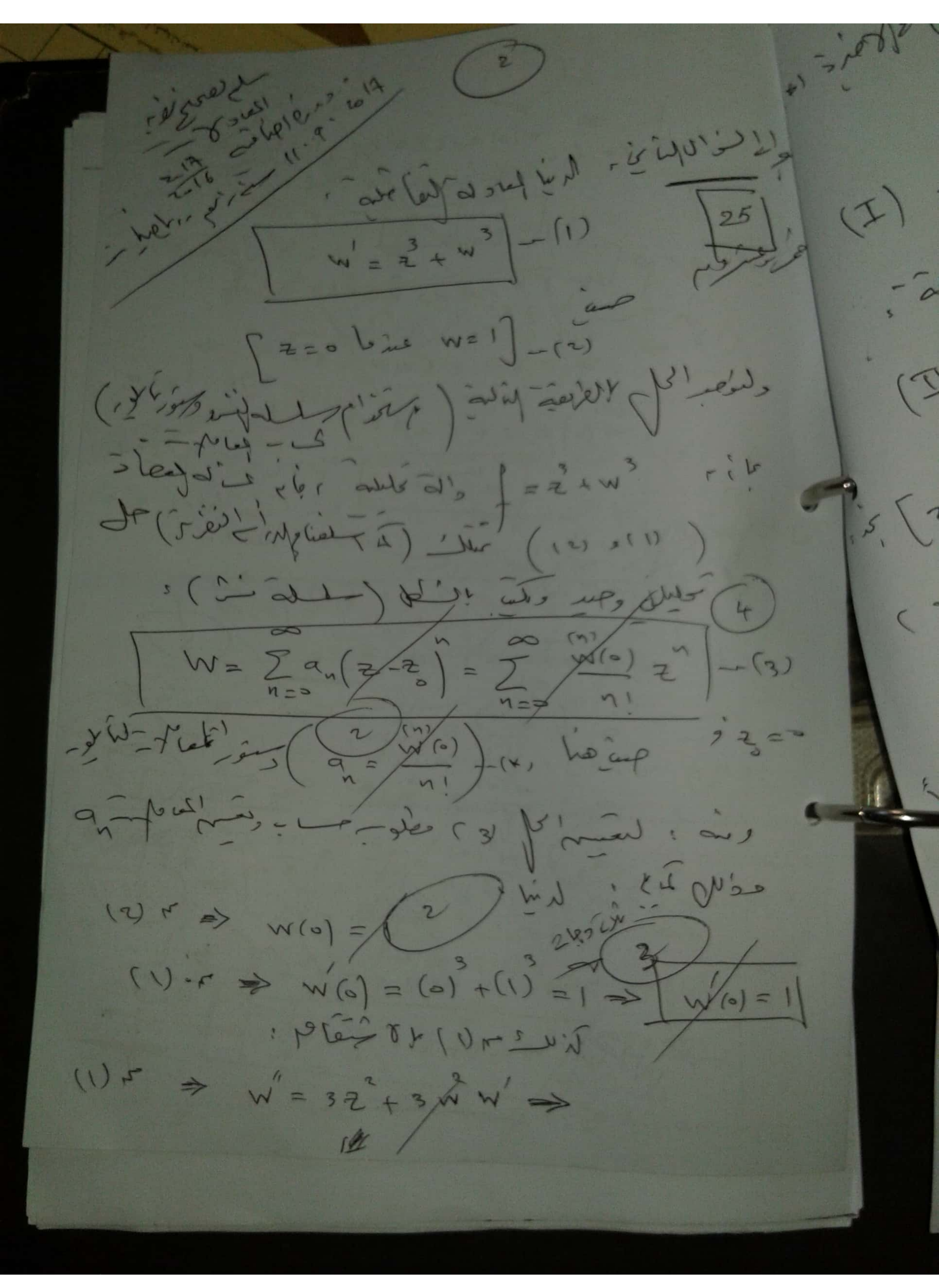
نعوض هنا كل i بـ (i+1) في الطرف الأيسر للتجانس في الأدلة: (1)

$$(*) \quad — \quad \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i = z^2 + \sum_{i=0}^{\infty} z^i \cdot \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}$$

(4)



(I) — $(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}$; if 2
3
(II) -- $3a_3 = 1 + \sum_{j=0}^{2} a_j \cdot a_{2-j}$; $i = 2$
$w = 1$; $z = 0$
1
⇒ $a_0 = 1$; $(w_0 = a_0)$
(I) ⇒ $|_{i=0}$ ⇒ $a_1 = a_0 \cdot a_0 = a_0^2 = 1$ ⇒ $a_1 = 1$
(I) ⇒ $|_{i=1}$ ⇒ a_2 ; ⇒ $2a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 a_0 = 2a_0 a_1 = 2$
$a_2 = 1$
(II) ⇒ $|_{i=2}$ ⇒ a_3 ; ⇒ $3a_3 = 1 + a_0 a_2 + a_1 \cdot a_1 + a_2 a_0 = 4$
$a_3 = \frac{4}{3}$
2
(3) ⇒ $w(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3} z^3 + \cdots$
25
4



جواب السؤال الثاني: لدينا المعادلة التفاضلية:

$$w' = z^3 + w^3 \quad (1)$$

25

$$\left[\, w = 1 \text{ عندما } z = 0 \,\right] \quad (2)$$

وللحصول على الحل بالطريقة الثالثة (باستخدام سلسلة تايلور وماكلورين)

بما أن $f = z^3 + w^3$ دالة تحليلية … (1) و (2) … حل تحليلي وحيد ويكتب بالشكل (سلسلة …):

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (3)$$

حيث هنا $z_0 = 0$ و $\left(a_n = \frac{w^{(n)}(0)}{n!} \right)$ (*) دستور المعاملات

ومنه: لتعيين الحل (3) مطلوب حساب وتعيين المعاملات a_n

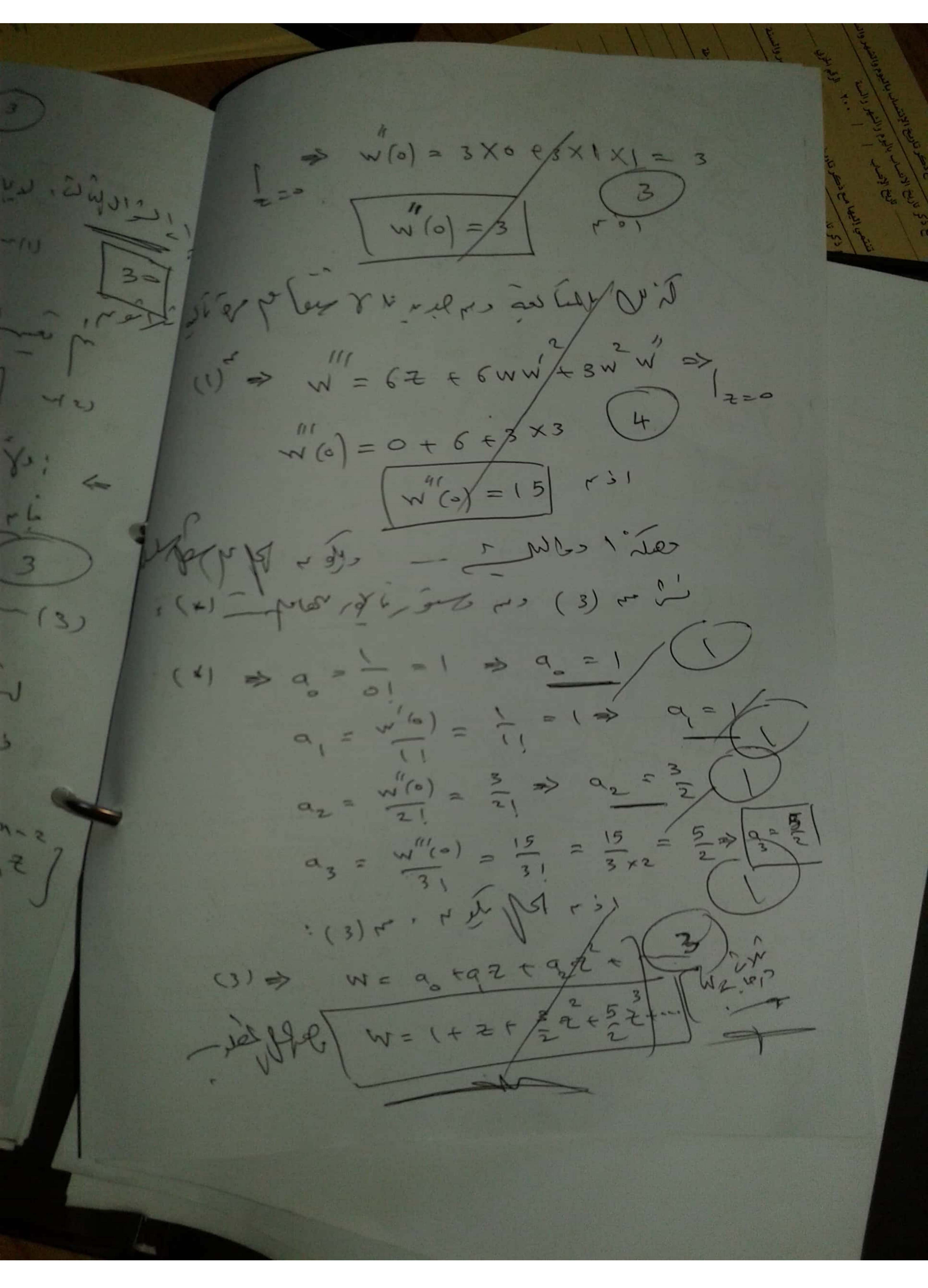
من الشرط: لدينا

$(2) \Rightarrow w(0) =$ 2

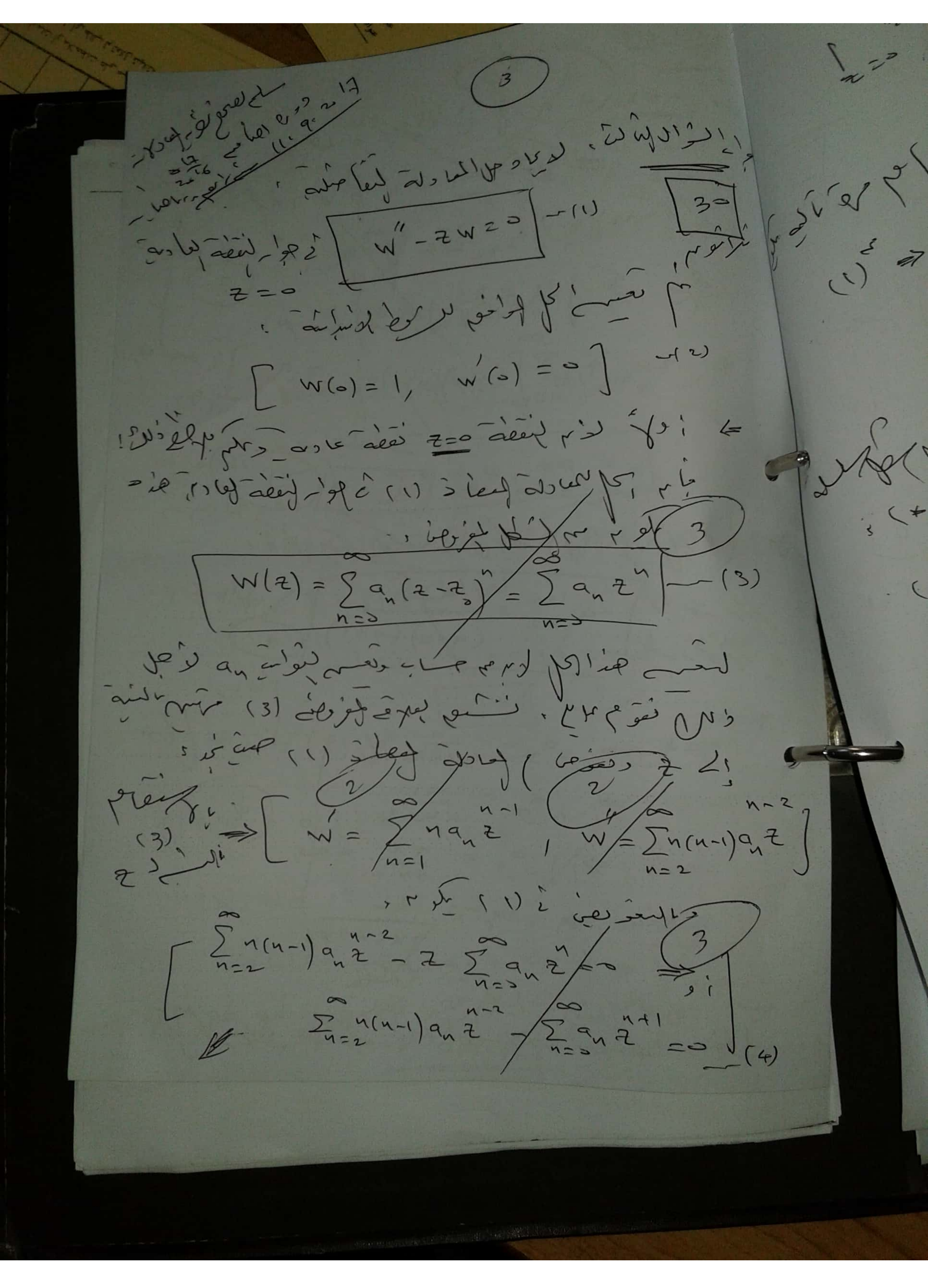
$(1) \Rightarrow w'(0) = (0)^3 + (1)^3 = 1 \Rightarrow w'(0) = 1$

كذلك من (1) بالاشتقاق:

$(1) \Rightarrow w'' = 3z^2 + 3w^2 w' \Rightarrow$



w''(0) = 3 × 0 + 3 × 1 × 1 = 3
w''(0) = 3
(1)' ⇒ w''' = 6z + 6ww'^2 + 3w^2 w''
w'''(0) = 0 + 6 + 3 × 3
w'''(0) = 15
a_0 = 1/0! = 1 ⇒ a_0 = 1
a_1 = w'(0)/1! = 1/1! = 1 ⇒ a_1 = 1
a_2 = w''(0)/2! = 3/2! ⇒ a_2 = 3/2
a_3 = w'''(0)/3! = 15/3! = 15/(3×2) = 5/2 ⇒ a_3 = 5/2
(3) ⇒ w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...
w = 1 + z + 3/2 z^2 + 5/2 z^3 + ...



(3)

17/11/2016

السؤال الثالث: لدينا من المعادلة التفاضلية:

30

$$w'' - zw = 0 \quad —(1)$$

في جوار النقطة العادية $z = 0$

ثم تعيين الحل الخاضع للشروط الابتدائية:

$$[\, w(0) = 1, \quad w'(0) = 0 \,] \quad —(2)$$

⇐ أولاً لدينا النقطة $z=0$ نقطة عادية ويطلب برهان ذلك!

فإن الحل للمعادلة المعطاة (1) في جوار النقطة العادية (0) هذه يكون من الشكل المفروض:

3

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad —(3)$$

لتعيين هذا الحل لابد من حساب وتعيين الثوابت a_n لأجل ذلك نقوم بما يلي: نشتق العلاقة المفروضة (3) مرتين بالنسبة إلى z ونعوض في المعادلة المعطاة (1) حيث نجد:

باستخدام (3) بالنسبة لـ z

2 2

$$\Rightarrow \left[\, w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \,\right]$$

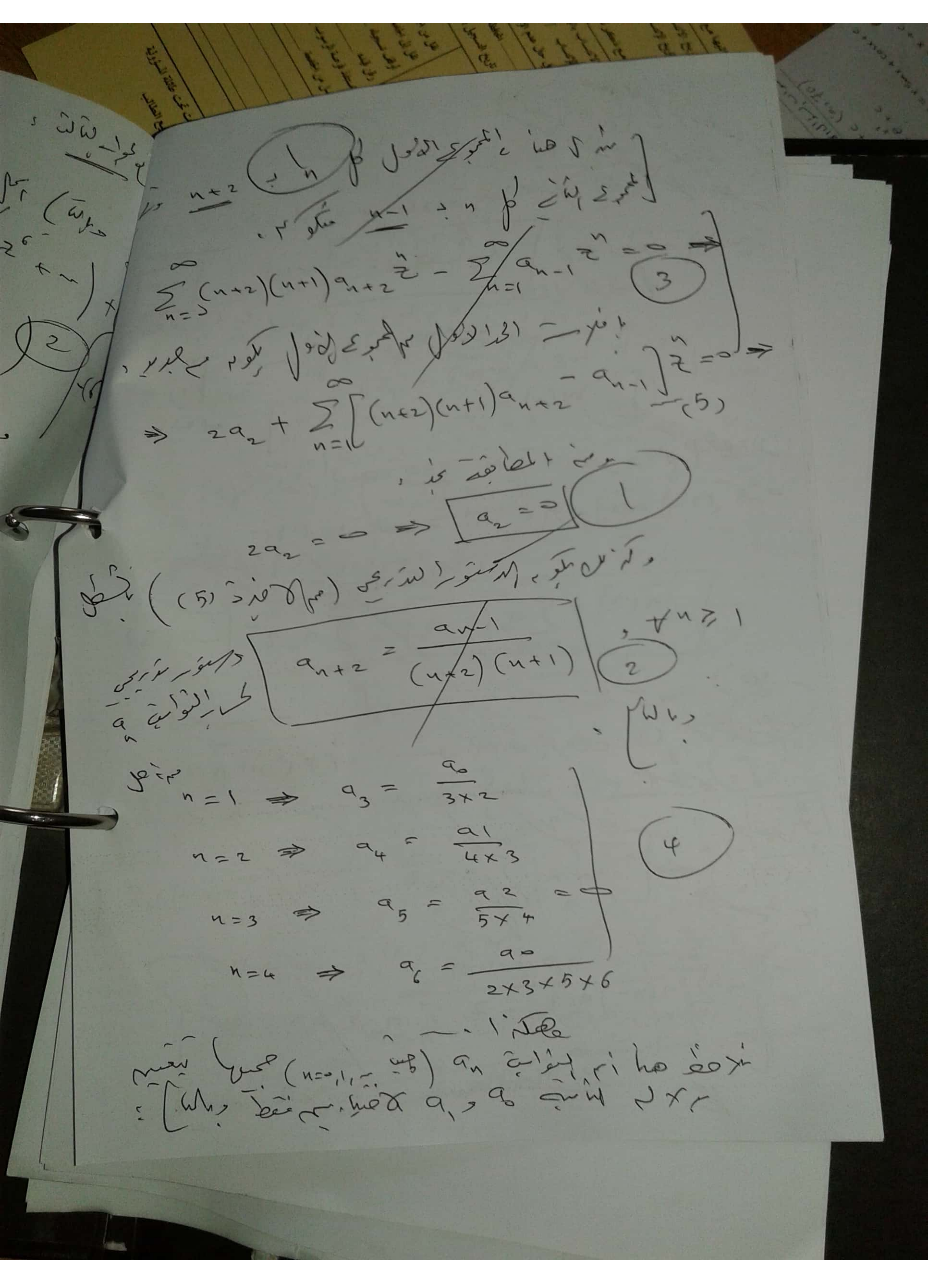
بالتعويض في (1) يكون:

3

$$\left[\, \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \right.$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0 \quad —(4)$$



نلاحظ هنا: المجموع الأول لـ n يبدأ بـ $n+2$

المجموع الثاني لـ n يبدأ بـ $n-1$ ، ...

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^n = 0 \quad (3)$$

بإفراز الحد الأول من المجموع الأول يكون لدينا:

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]z^n = 0 \quad (5)$$

ومن المطابقة نجد:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0} \quad (1)$$

وكذلك نحصل على الدستور التدريجي (من المعادلة (5))

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}} \quad (2) \quad , \forall n \geq 1$$

الدستور التدريجي لحساب الثوابت a_n

ومنه نحصل

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3\times 2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4\times 3}$$

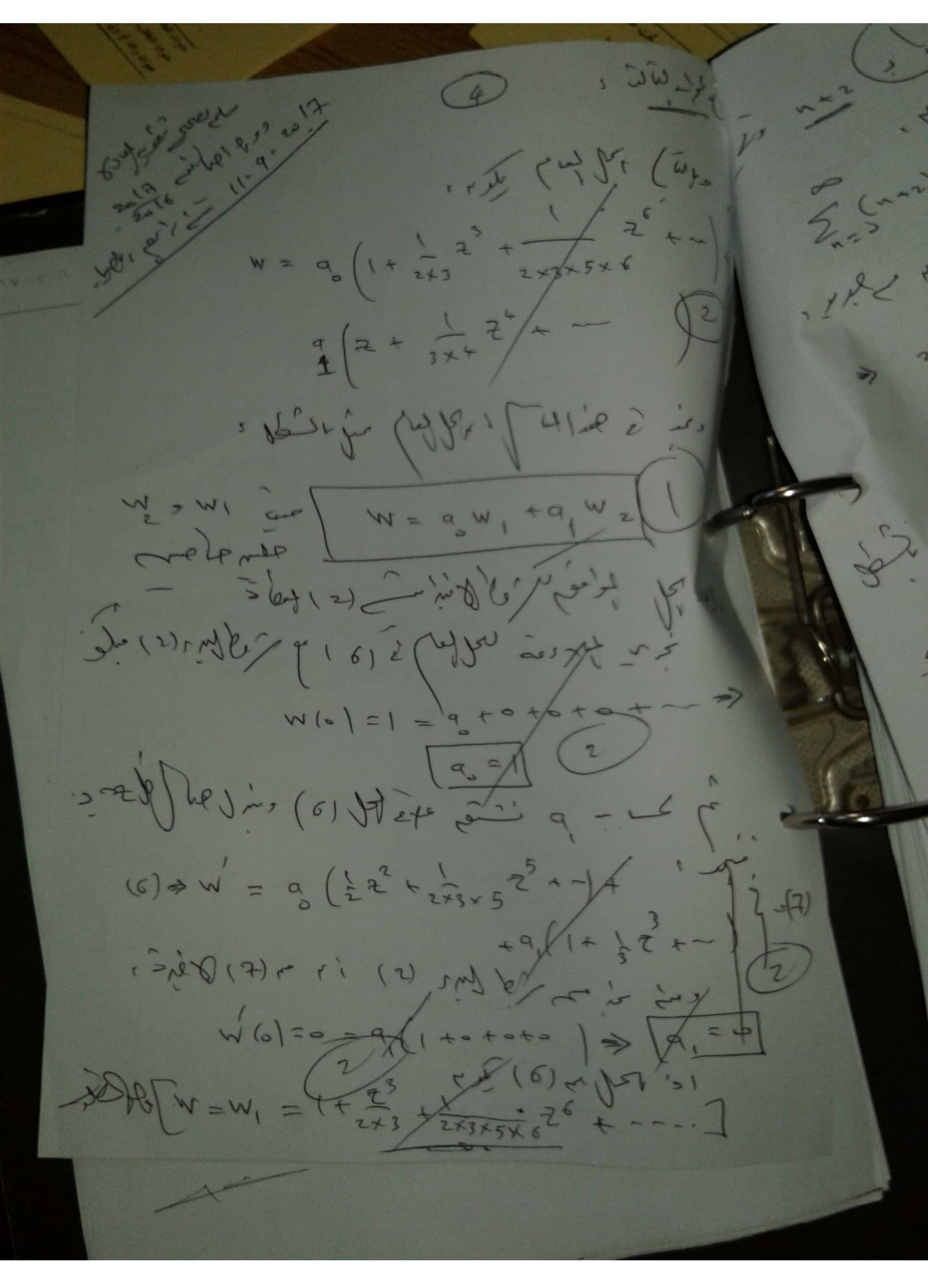
$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{5\times 4} = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_0}{2\times 3\times 5\times 6}$$

(4)

وهكذا ...

نلاحظ هنا أن الثوابت a_n ($n=0,1,\ldots$) جميعها تتعين بدلالة الثابتين a_0 و a_1 الاختياريين فقط وبالتالي:



(4)

$$w = a_0\left(1 + \frac{1}{2\times3}z^3 + \frac{1}{2\times3\times5\times6}z^6 + \cdots\right) + a_1\left(z + \frac{1}{3\times4}z^4 + \cdots\right)$$

$$W = a_0 W_1 + a_1 W_2$$

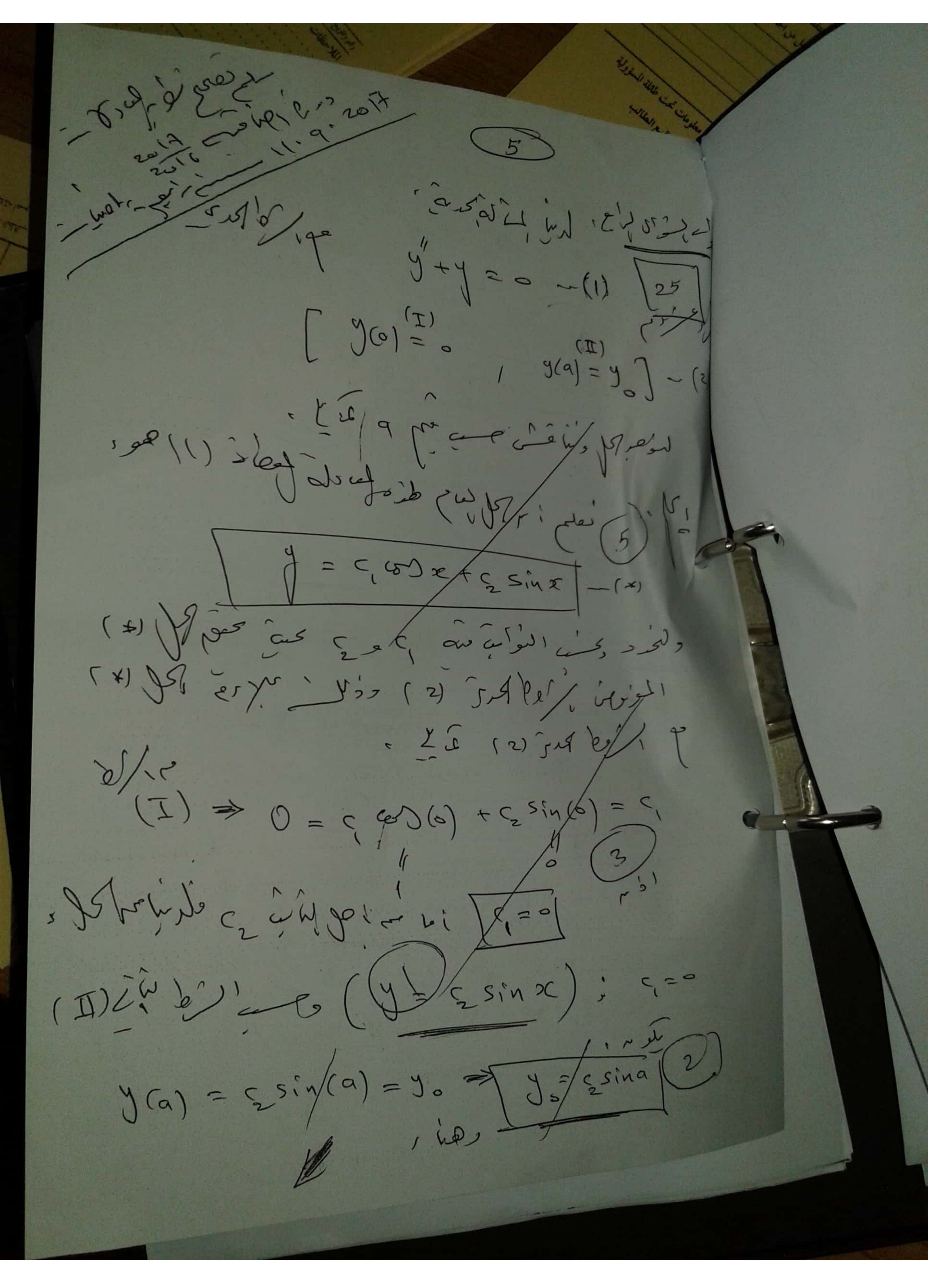
W_1, W_2

$$W(0) = 1 = a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow a_0 = 1$$

$$(6) \Rightarrow W' = a_0\left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2\times3\times5}z^5 + \cdots\right) + a_1\left(1 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots\right) \quad (7)$$

$$W'(0) = 0 = a_1(1 + 0 + 0 + 0) \Rightarrow a_1 = 0$$

$$W = W_1 = \left[1 + \frac{z^3}{2\times3} + \frac{1}{2\times3\times5\times6}z^6 + \cdots\right]$$



سلم نصفي توزيع الدرجات 2016/2017 — 11.9.2017

(5)

السؤال الرابع: لدينا المسألة الحدية:

$$y'' + y = 0 \quad \text{—}(1)$$

$$\left[\; y(0) \overset{(I)}{=} 0 \;,\quad y(a) \overset{(II)}{=} y_0 \;\right] \quad \text{—}(2)$$

(25)

للحصول على الحل ونناقش حسب قيم a الآتي:

الحل العام للمعادلة (1) هو: نعلم أن الحل العام لهذه المعادلة هو

(5)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{—}(*)$$

ولنحدد بحث الثوابت c_1 و c_2 بحيث يحقق الحل (*) الشروط الحدية (2) وذلك بالتعويض بالحل (*) في الشروط الحدية (2) كما يلي:

$$(I) \Rightarrow 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$$

(3)

أي أن $c_1 = 0$ ولدينا الحل

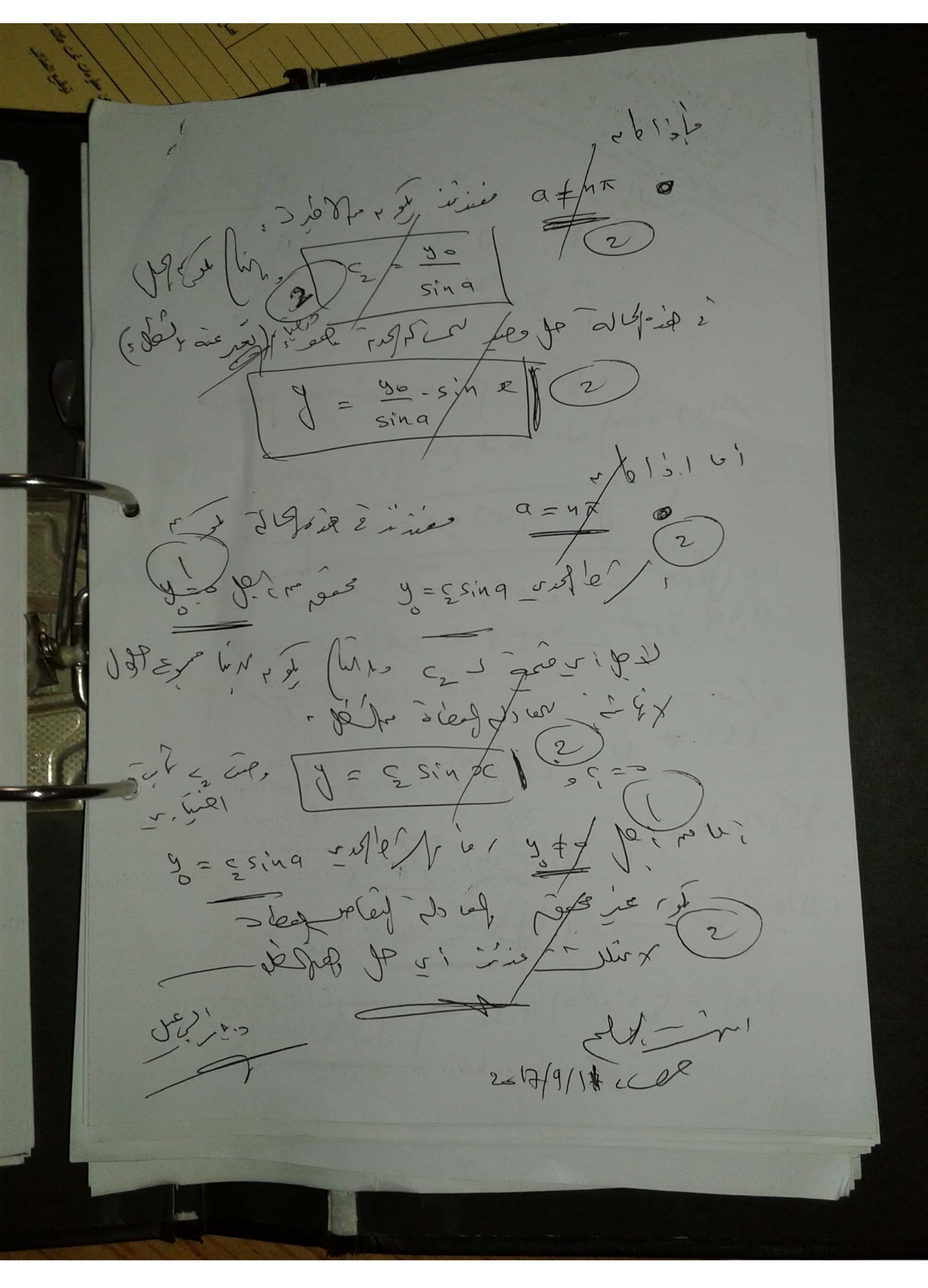
$$\left(y = c_2 \sin x\right) \;;\; c_1 = 0$$

وحسب الشرط الثاني (II)

$$y(a) = c_2 \sin(a) = y_0 \Rightarrow y_0 = c_2 \sin a$$

(2)

وهنا،



أما إذا كان

$a \neq n\pi$ فعندئذ يكون من الإفراد:

$c_2 = \frac{y_0}{\sin a}$ وبهذا يكون الحل

في هذه الحالة حل وحيد يعطى بالحدود (بعد تعويض الشكل):

$$y = \frac{y_0}{\sin a} \cdot \sin x$$

أما إذا كان

$a = n\pi$ فعندئذ في هذه الحالة يكون

إذا كان الحدي $y_0 = c_2 \sin a$ محقق من أجل كل y_0

لأجل أي قيمة لـ c_2 وهذا يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول

تحقق المعادلة المعطاة مع الشرط:

$$y = c_2 \sin x$$

وحيث c_2 ثابت اختياري، $c_1 = 0$

أما من أجل $y_0 \neq c_2 \sin a$ أي أن الحدي

يكون غير محقق المعادلة التفاضلية المعطاة

وبالتالي فعندئذ لا يوجد أي حل للمسألة

د. ...

اسم ... المصحح

2017/9/1…